Colle du 26/03 - Sujet 1
Séries et dimension

Question de cours.

1. Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
2. Démontrer que la série exponentielle converge.

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n}$ converge et calculer sa somme totale.

Exercice 2. Soit
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+b+c-d = a-3b-2c = 0 \right\}.$$
Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer sa dimension et un supplémentaire de F.

Colle du 26/03 - Sujet 2
Séries et dimension

Question de cours.

1. Enoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.
2. Déterminer un supplémentaire dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = O_2 \right\}$.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.

Exercice 2. Soit $A = X^3 - 4X + 2$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}_5[X] \mid A|P \}$.

1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_5[X]$ et déterminer un supplémentaire de F.
2. Même question pour $F_1 = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid A|P \}$ dans $E_1 = \mathbb{R}[X]$.

Colle du 26/03 - Sujet 3
Séries et dimension

Question de cours.

1. Enoncer le théorème de la base extraite.
2. Démontrer que la série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$ converge.

Exercice 1. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Déterminer la dimension de F et $\mathscr{D}$. Sont-ils supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.